ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 1, с. 56–66

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗНОСА МАШИН

© 2012 г. С.А. Смоляк

(Москва)

Метод дисконтированных денежных потоков применен к задаче стоимостной оценки подержанных машин и оборудования. Предложена модель, позволяющая при небольшой исходной информации оценивать уменьшение рыночной стоимости (износ) машины с возрастом. В модели учитываются налоги на имущество и прибыль, а процесс износа машины рассматривается как случайный.

Ключевые слова: машины, оборудование, стоимость, износ, оценка, стохастическое моделирование.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья посвящена проблеме стоимостной оценки машин, состояние которых в процессе эксплуатации меняется случайным образом.

Начнем с определения основных понятий. Под “машинами” мы понимаем отдельно оцениваемые установки, машины, оборудование и транспортные средства и будем подразделять их на *виды*, а каждый вид – на *марки* (этим термином охватываются и модели, и модификации). Примем, что разные марки машин одного вида используются для одних и тех же целей: они способны производить ту же продукцию, выполнять те же работы или оказывать те же услуги (в противном случае будем относить их к другому виду машин). Тем самым они “взаимозаменяемы” и являются товарами, конкурирующими друг с другом на рынке. Поэтому машина – это типичный представитель *массового* имущества, которое серийно изготовляется (производится, создается) и обращается на рынке в достаточно большом количестве. Рынок машин каждого вида делится на первичный и вторичный. На *первичном* рынке продаются машины *в новом состоянии* (только что изготовленные[1]), на *вторичном* – подержанные (бывшие в эксплуатации).

Независимо от того, обращается ли на рынке продукция, производимая машиной, или нет, ее использование приносит владельцу определенные *выгоды*. Их можно определить как рыночную стоимость произведенной продукции за вычетом затрат по эксплуатации машины – такой показатель близок по содержанию к так называемой “прибыли до начисления амортизации и уплаты процентов и налогов” (*Earnings before Interests, Taxes, Depreciation and Amortization*), если в составе затрат не учитываются налоги, и с так называемым чистым операционным доходом, если их учитывать. Если машина производит промежуточную продукцию или отдельные технологические операции, то такие результаты работы, хотя и не обращаются на рынке, тоже обладают определенной полезностью для владельца и потому, теоретически, имеют рыночную стоимость, отражающую их вклад в рыночную стоимость готовой продукции. Другое дело, что эта рыночная стоимость не может быть измерена непосредственно.

Если рассматривать процесс использования машины в непрерывном времени, то основной экономической характеристикой этого процесса становится *интенсивность* приносимых выгод – размер выгод от использования машины за малую единицу времени. В процессе старения машина подвергается *физическому износу*. В конечном счете он проявляется в том, что интенсивность приносимых ею выгод с течением времени имеет общую тенденцию к снижению (разумеется, после ремонта показатели машины улучшаются, однако указанная тенденция все равно сохраняется).

[1] Мы не используем термин “новые”, обозначающий машины новых марок, которые только начинают поступать на рынок.

В (Смоляк, 2006; Смоляк, 2008) для описания этого процесса (в детерминированной ситуации) указанные выгоды раскладывались на две составляющие – не зависящую от возраста машины и меняющуюся в зависимости от возраста по экспоненциальному закону. Такое представление адекватно, во всяком случае для двух составляющих. В первой ситуации производительность машины в процессе эксплуатации остается примерно постоянной, тогда как эксплуатационные затраты экспоненциально растут. Вторая ситуация в некотором смысле обратная: эксплуатационные затраты по мере старения машины не меняются, тогда как производительность экспоненциально снижается. Разумеется, возможны и промежуточные ситуации, когда производительность машины снижается с возрастом по одному закону, а эксплуатационные затраты растут по какому-то другому закону. Однако, как показывают экспериментальные расчеты, динамика выгод и здесь может быть с достаточной точностью аппроксимирована указанной зависимостью.

При оценке рыночной стоимости машины (МСО, 2005) предполагается, что после даты оценки она будет использоваться экономически рационально (в оценке имущества это трактуется как принцип наиболее эффективного использования – НЭИ). Однако когда-нибудь наступит момент, когда ее дальнейшее функционирование становится неэффективным, невыгодным. Этот момент определяет *срок службы машины*, когда она должна быть *утилизирована* – передана в сферу вторичного использования. При утилизации владелец машины получает определенные доходы и несет некоторые расходы. Разность между ними определяет утилизационное сальдо машины, которое может быть как положительным, так и отрицательным.

Для оценки основных средств часто применяется *сравнительный* (*рыночный*) подход, когда стоимость объекта оценивается по данным о ценах сделок с аналогичными объектами. При оценке подержанных машин такой подход не всегда удается реализовать, так как из данных о реальных сделках или объявлений о продаже не всегда можно установить, действительно ли проданная или предлагаемая к продаже машина находится в таком же техническом состоянии, что и оцениваемая. Кроме того, "подержанность" машины может быть разной, так что цены на вторичном рынке имеют гораздо большую вариацию, чем на первичном. По этой причине гораздо чаще сравнительный подход применяют в сочетании с затратным. Это выглядит следующим образом: вначале, опираясь на данные о ценах *первичного* рынка, оценивают стоимость машины данной марки в новом состоянии – *восстановительную стоимость*, а затем корректируют ее с учетом износа оцениваемой машины (см. ниже). Для такой корректировки обычно используют таблицы или функции, отражающие уменьшение рыночной стоимости (износ) машины в зависимости от ее хронологического возраста (критический обзор подобных таблиц и формул приведен в (Смоляк, 2008)). Однако техническое состояние машины (а оно во многом зависит от истории ее эксплуатации) при этом не учитывается. Поэтому в тех случаях, когда опытный оценщик имеет возможность оценить техническое состояние машины, он мысленно сопоставляет оцениваемую машину с "нормально эксплуатировавшимися" машинами разного возраста и определяет, в каком возрасте "нормально эксплуатирующаяся" машина окажется в том же состоянии, что и оцениваемая. Этот возраст оценщики именуют "эффективным" и при оценке машины с помощью указанных формул или таблиц используют его вместо хронологического возраста (Ковалев и др., 2003).

При *доходном* подходе рыночная стоимость машины оценивается исходя из тех (чистых) выгод, которые она будет (при рациональном использовании) приносить в будущем, а именно – как их дисконтированная сумма за оставшийся срок службы.

В общем случае машины могут эксплуатироваться и утилизироваться разными способами. Однако из принципа НЭИ вытекает, что выгоды должны прогнозироваться оценщиком применительно к наиболее эффективным способам эксплуатации и утилизации машины. При этом утилизационное сальдо, отвечающее наиболее эффективному способу утилизации машины, будет ее *утилизационной стоимостью* (*salvage value*). Мы будем считать ее известной величиной.

Срок службы машины, отвечающий наиболее эффективному способу эксплуатации, будем называть *рациональным*, измерять в годах и обозначать через T. Обычно такие сроки известны и не слишком велики.

В этой статье мы предложим метод определения стоимости подержанных машин. Этот метод также основан на сравнительном подходе, однако коэффициенты, отражающие зависимость стоимости машины от ее эффективного возраста, мы устанавливаем, используя доходный подход. Для этого в следующем разделе мы построим экономико-математическую модель износа машины, рассматривая процесс износа машины как случайный процесс в непрерывном времени.

2. МОДЕЛЬ ИЗНОСА МАШИНЫ

Рассматриваются машины определенной марки, различающиеся по своему состоянию, в один и тот же момент времени 0, являющийся датой оценки. Состояние машины будем понимать как ее эффективный возраст. Предельный эффективный возраст машины обозначим через T. Это означает, что дальнейшая эксплуатация машины, находящейся в состоянии t, целесообразна только при $t < T$, а машины в состоянии $t \geq T$ подлежат утилизации. Стоимость машины, находящейся в состоянии t, обозначим через $K(t)$. В этих обозначениях величина $K(T)$ будет отражать утилизационную стоимость U машин данной марки и будет считаться известной. При оценке имущества обычно отсутствует информация о налогах на имущество и прибыль, уплачиваемых владельцем имущества. Поэтому далее мы временно принимаем, что оценщику известны величины $B(t)$ – интенсивность выгод, приносимых машиной в состоянии t до осуществления указанных расходов (доналоговая). Таким образом, доналоговые выгоды, приносимые машиной, находящейся в состоянии t, за малый отрезок времени ε составляют $B(t)\varepsilon$. Функцию $B(t)$ будем считать убывающей, а функцию $K(t)$ – гладкой.

Кроме того, для дисконтирования будем применять непрерывную номинальную посленалоговую ставку ρ_a.

Мы предполагаем, что процесс физического износа машины в ходе ее рациональной эксплуатации состоит из случайно возникающих скачкообразных изменений (например, отказов узлов), назовем их “сбоями”, после которых машина “стареет”, т.е. ее эффективный возраст увеличивается. Поток “сбоев” мы считаем простым пуассоновским с некоторой интенсивностью λ. Таким образом, в течение времени ε возможны две ситуации.

1. “Сбой” не произошел. В этой ситуации эффективный возраст машины не меняется.

2. Произошел “сбой”. Вероятность этой ситуации равна $\lambda\varepsilon$. В этом случае эффективный возраст машины увеличивается на случайную величину s, зависящую от того, какой именно узел машины отказал и как именно проявился этот отказ. Будем считать, что эта случайная величина не превосходит предельного эффективного возраста T, а в пределах от 0 до T распределена экспоненциально, т.е. имеет плотность распределения $\alpha e^{-\alpha s}/(1 - e^{-\alpha T})$. Среднее значение этой случайной величины, как нетрудно проверить, составит $\bar{s} = (e^{\alpha T} - 1 - \alpha T)/[\alpha(e^{\alpha T} - 1)]$. Как только эффективный возраст машины превысит предельное значение T, дальнейшая эксплуатация машины прекращается, и она утилизируется.

Обратим внимание, что средний прирост эффективного возраста машины за время при наших предположениях составит примерно[2] $\lambda\varepsilon\bar{s}$. За время ε этот возраст должен измениться в среднем тоже на ε. Поэтому должно выполняться равенство:

$$\lambda\bar{s} = \lambda\,\frac{e^{\alpha T} - 1 - \alpha T}{\alpha(e^{\alpha T} - 1)} = 1. \tag{1}$$

Далее будет подразумеваться, что это равенство выполняется.

Для построения искомой модели оценки стоимости машины, как и в (Смоляк, 2008; Смоляк, 2009), используем принцип дисконтирования, лежащий в основе методов *доходного подхода* к оценке имущества, который в данном случае можно сформулировать так: *стоимость имущества на дату оценки равна дисконтированным выгодам от рационального использования имущества в течение некоторого периода плюс дисконтированное математическое ожидание стоимости имущества в конце периода.*

[2] Здесь и далее знаком “≈” или словом «примерно» мы обозначаем равенства, точные с точностью до малых более высокого порядка.

Рассмотрим участника рынка, который в момент 0 приобретает машину в состоянии $t < T$ по рыночной стоимости $K(t)$, использует ее в течение малого интервала времени и затем продает (также по рыночной стоимости). Рассчитаем чистые выгоды этого участника, учитывая при этом указанные выше основные факторы.

Заметим, что купленная машина будет поставлена на баланс по цене приобретения $K(t)$, так что за время ε на нее будет начислена амортизация $K(t)a(t)\varepsilon$ (здесь $a(t)$ – амортизационная ставка). При этом в момент времени ε машина будет иметь остаточную (налоговую) стоимость $K(t) - K(t)a(t)\varepsilon$. Налогооблагаемую прибыль от использования машины за время ε получим, вычитая из получаемых выгод $B(t)\varepsilon$ амортизацию и налог на имущество $mK(t)\varepsilon$. Она составит:

$$B(t)\varepsilon - K(t)a(t)\varepsilon - mK(t)\varepsilon = \{B(t) - K(t)[a(t) + m]\}\,\varepsilon.$$

В момент времени ε машина продается по (новой, случайной) рыночной стоимости. Обозначим ее временно через K_1. Налогооблагаемой прибылью от *продажи* здесь будет цена продажи за вычетом остаточной стоимости машины, т.е. $K_1 - [K(t) - K(t)a(t)\varepsilon]$. Суммируя прибыли от использования и от продажи машины, найдем совокупную прибыль:

$$\{B(t) - K(t)[a(t)+m]\}\,\varepsilon + K_1 - [K(t) - K(t)a(t)\varepsilon] = K_1 - K(t) + [B(t) - mK(t)]\varepsilon.$$

Налог на прибыль (по ставке n) при этом будет равен

$$n\{K_1 - K(t) + [B(t) - mK(t)]\varepsilon\}.$$

Обратите внимание, что размер налога при этом не зависит от выбранной владельцем амортизационной политики.

Учтем теперь, что все указанные выше денежные поступления и расходы представлены в номинальном выражении, без корректировки на инфляцию. Рассчитаем теперь сумму дисконтированных (по номинальной посленалоговой ставке ρ_a) посленалоговых чистых выгод от рассматриваемых операций. В данном случае чистые выгоды будут включать выручку K_1 от продажи машины в момент времени ε и доналоговые выгоды $B(t)\varepsilon$ за вычетом налогов на имущество и на прибыль. Три последние составляющие малы, и с точностью до малых более высокого порядка их можно отнести к дате оценки (моменту 0). Тогда искомая сумма примет следующий вид:

$$\begin{gathered}(1 - \rho_a\varepsilon)K_1 + B(t)\varepsilon - mK(t)\varepsilon - n\{K_1 - K(t) + [B(t) - mK(t)]\varepsilon\} \approx \\ \approx (1 - n - \rho_a\varepsilon)K_1 + nK(t) + (1-n)[B(t) - mK(t)]\varepsilon.\end{gathered} \qquad (2)$$

В этом выражении случайной является только величина K_1. Для получения искомой модели нам необходимо конкретизировать ее математическое ожидание. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Как уже говорилось, для оценки подержанных машин оценщики часто используют таблицы или формулы для коэффициентов, отражающих соотношение стоимости подержанной машины и машины той же марки в новом состоянии. В нашей модели эту роль играют величины $k(t) = K(t)/K(0)$ – коэффициенты годности[3]. Оказывается, что такие коэффициенты достаточно стабильны во времени и близки для машин одного вида разных марок.

Но что означает стабильность таких коэффициентов? Предположим, что сейчас и год тому назад значения $k(t)$ оказались одинаковыми. Тогда за прошедший год стоимость машин в новом состоянии и стоимость подержанных машин той же марки возраста t изменилась одинаково, т.е. темпы роста цен на первичном рынке были такими же, как и на вторичном. Такую инфляцию можно назвать *видовой* (Смоляк, 2008). Допущение о видовом характере инфляции не является чем-то необычным. Так, например, при оценке эффективности строительных и иных реальных инвестиционных проектов приходится учитывать как рост цен на жилые и офисные помещения, так и рост затрат на строительно-монтажные работы. В этих целях в расчеты закладываются некоторые средние прогнозируемые темпы роста указанных цен и затрат. По существу, в таких расчетах предполагаются одинаковые темпы роста цен на любые (а не только сооружаемые по

[3] В американской литературе их выражают в процентах и именуют процентами годности (percent good factor), российские оценщики используют их дополнение до 100% и именуют процентами износа.

проекту) жилые и офисные помещения (любые виды строительно-монтажных работ). Нередко возникают ситуации, когда известно, по какой цене была приобретена машина несколько лет тому назад, но неизвестно, по какой цене такая же машина продается на дату оценки. В таких ситуациях оценщики применяют к машинам любого возраста индексы-дефляторы, отражающие темпы роста цен на данные машины в новом состоянии в ретроспективном периоде (этот метод описан, например, в (Ковалев и др., 2003, с. 101–102); значения таких индексов для США указаны, например, в (Assessors' Handbook, 2005; Marshall&Swift, 2008)). Другими словами, и здесь инфляция также считается видовой.

Разумеется, если цены на первичном и вторичном рынках растут непропорционально, то коэффициенты годности со временем могут измениться. Поэтому не исключено, что гипотеза о видовом характере инфляции иногда может не подтвердиться. Однако она позволяет хотя бы приближенно учесть инфляцию при оценке машин и не требует для этого чрезмерно большого объема исходной информации. И в самом деле, чтобы учесть инфляцию, оценщику необходимо ее спрогнозировать. Для этого он обычно использует информацию об изменении цен на машины в предшествующем периоде. Наиболее подробной при этом будет информация о ценах первичного рынка, тогда как данные вторичного рынка обычно оказываются непредставительными (не так уж часто в распоряжении оценщика оказываются цены достаточно большого числа сделок, совершенных в разное время, но с машинами одного и того же вида, марки и возраста). В таком случае оценщик сможет только дать прогноз инфляции на первичном рынке, т.е. спрогнозировать, как будут меняться в ближайшее время стоимости машин в новом состоянии. Именно на эту информацию (непрерывный темп видовой инфляции i) мы и будем опираться.

Обозначим через s случайное увеличение эффективного возраста рассматриваемой машины за время ε. Если бы инфляции не было, то стоимость этой машины была бы точно такой же, как и у машины возраста $t + s$ в момент 0, т.е. $K(t + s)$. Однако если цены купли–продажи машин растут с темпом i, то за время ε их рыночные стоимости вырастут в $1 + i\varepsilon$ раз. В таком случае должно выполняться равенство

$$K_1 = (1 + i\varepsilon)K(t+s).$$

Распределение величины s нам известно: с вероятностью $1 - \lambda\varepsilon$ она будет равна нулю, а с вероятностью $\lambda\varepsilon$ она распределена экспоненциально на отрезке от 0 до T с указанной выше плотностью. Поэтому математическое ожидание величины K_1 будет следующим:

$$\mathrm{M}[K_1] = (1 + i\varepsilon)M[K(t+s)] = (1 + i\varepsilon)\left[(1-\lambda\varepsilon)K(t) + \lambda\varepsilon\int_0^T K(t+s)\frac{\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\mathrm{e}^{-\alpha s}\,ds\right].$$

Тогда в соответствии с принципом дисконтирования с учетом формулы (2) при $t < T$ получаем:

$$K(t) \approx (1 - n - \rho_a\varepsilon)(1 + i\varepsilon)\left[(1-\lambda\varepsilon)K(t) + \frac{\lambda\alpha\varepsilon}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\int_0^T K(t+s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,ds\right] + nK(t) +$$

$$+(1-n)[B(t) - mK(t)]\varepsilon \approx K(t)[1 - \rho_a\varepsilon + (1-n)(i-\lambda)\varepsilon - (1-n)m\varepsilon] +$$

$$+\frac{(1-n)\lambda\alpha\varepsilon}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\int_0^T K(t+s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,ds + (1-n)B(t)\varepsilon.$$

Легко убедиться, что такое равенство возможно, только если

$$K(t)[-\rho_a + (1-n)(i-\lambda) - (1-n)m] + \frac{(1-n)\lambda\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\int_0^T K(t+s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,ds + (1-n)B(t) = 0.$$

Разделив его на $(1 - n)$, после простых преобразований найдем:

$$\frac{\lambda\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\int_0^T K(t+s)\mathrm{e}^{-\alpha s}ds-(\rho+\lambda)K(t)+B(t)=0, \tag{3}$$

где

$$\rho=\frac{\rho_a}{1-n}-i+m. \tag{4}$$

Следуя логике (Смоляк, 2008; Смоляк, 2009), поясним экономическое содержание ставки ρ. Для этого заметим, что в общем случае ставка дисконтирования отражает доходность альтернативных направлений инвестирования, а такими обычно бывают вложения в финансовые инструменты. Поэтому обычно ставку дисконтирования принимают по данным фондового рынка на уровне доходности тех или иных финансовых инструментов (скажем, акций, облигаций или депозитов). Естественно, что все публикуемые данные о таких доходностях – доналоговые, не учитывающие тех налогов (на дивиденды или на прирост капитала), которые уплачивает владелец ценных бумаг. Таким образом, фондовый рынок позволяет установить *доналоговую* ставку дисконтирования r. В то же время в расчетах эффективности инвестиционных проектов и при оценке бизнеса по посленалоговым денежным потокам используется иная, *посленалоговая* ставка дисконтирования. Именно такая ставка ρ_a применялась при выводе уравнения (3). Для того чтобы получить посленалоговую доходность ценных бумаг, соответствующую доналоговую доходность r умножают на так называемый “налоговый корректор” – дополнение ставки налога на прибыль до единицы $(1 - n)$. Поэтому обычно принимается, что $\rho_a = r(1 - n)$. Но тогда $\rho=\rho_a/(1-n)-i+m=r-i+m$.

Заметим, что (доналоговые) доходности финансовых инструментов всегда определяются в номинальном выражении, т.е. без корректировок на инфляцию. Вычитая из такой доходности темп инфляции, мы получаем ту же доходность в *реальном* выражении. Это значит, что ставка по смыслу является реальной и доналоговой. В то же время она существенно отличается от обычных реальных доналоговых ставок: во-первых, в ней учитывается не темп общей инфляции в стране, а темп роста цен на машины данной марки, а во-вторых, она включает также ставку налога на имущество. И то и другое совершенно естественно, поскольку она применяется для дисконтирования выгод, в которых не учитываются налоги на имущество и прибыль. Учитывая изложенное, ставку естественно трактовать как *специальную доналоговую* ставку дисконтирования.

Как уже отмечалось, формула (3) справедлива при $t < T$. По непрерывности она будет верна и при $t = T$. Однако в таком случае в правой части под интегралом окажутся значения функции $K(t)$ при значениях аргумента больших или равных T. Но все такие значения равны утилизационной стоимости машины U, из-за чего формула упрощается:

$$\frac{\lambda\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\int_0^T U\mathrm{e}^{-\alpha s}ds-(\rho+\lambda)U+B(T)=0.$$

Такое равенство возможно только в случае, когда

$$B(T) = \rho U. \tag{5}$$

По существу, это является условием экономической рациональности срока службы машины.

Для упрощения дальнейших выкладок удобно ввести обозначения:

$$\eta=\frac{\lambda\alpha}{(\rho+\lambda)(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})};\quad L(t)=K(t)-U,\ \ Q(t)=B(t)-\rho U. \tag{6}$$

В таком случае будет $L(t) = 0$ при $t \ge T$; $Q(T) = 0$, а уравнение (3) после замены переменных $x = t + s$ в интеграле примет вид:

$$(\rho+\lambda)\eta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\int_t^T L(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}dx-(\rho+\lambda)L(t)+Q(t)=0. \tag{7}$$

Разделим обе части этого равенства на $(\rho + \lambda)e^{\alpha t}$ и продифференцируем, тогда

$$-\eta L(t)e^{-\alpha t} + \alpha L(t)e^{-\alpha t} - L'(t)e^{-\alpha t} + \frac{Q'(t) - \alpha Q(t)}{\rho + \lambda} e^{-\alpha t} = 0.$$

Отсюда после простых преобразований получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $L(t)$:

$$L'(t) + (\eta - \alpha)L(t) = \frac{Q'(t) - \alpha Q(t)}{\rho + \lambda}.$$

Решение данного уравнения с указанным выше краевым условием $L(T) = 0$ оказывается следующим:

$$L(t) = \frac{1}{\rho + \lambda}\left[Q(t) + \eta \int_t^T Q(s) e^{(\eta-\alpha)(t-s)} ds\right].$$

Учитывая обозначения (6), отсюда вытекает следующее выражение для искомой зависимости стоимости машины от ее эффективного возраста:

$$K(t) = \frac{1}{\rho + \lambda}\left\{B(t) - \rho U + \eta \int_t^T [B(s) - \rho U] e^{(\eta-\alpha)(t-s)} ds\right\} + U. \qquad (8)$$

Обратим внимание, что входящие в полученную формулу значения $B(s)$ относятся не к оцениваемой машине в будущий момент времени s, а к *другой машине* той же марки, которая в текущий момент (на дату оценки) имеет эффективный возраст s.

Такого рода модели были названы в (Смоляк, 2008; Смоляк, 2009) *эргодическими*.

3. ПРИМЕНЕНИЕ К УСТАНОВЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГОДНОСТИ

Разумеется, в тех случаях, когда (например, по данным синхронных наблюдений за машинами в разных состояниях) выгоды от использования машин можно измерить непосредственно, формула (8) позволяет прямо оценивать стоимость машин. Однако такие ситуации достаточно редки. Гораздо чаще зависимость $B(t)$ точно неизвестна. Однако мы знаем, что функция $B(t)$ убывающая и обращается в ρU в конце рационального срока службы (при $t = T$). Характер убывания этой функции может быть различным. Для одних видов машин темпы снижения $B(t)$ малы в первые годы эксплуатации и велики в конце срока службы. Для других видов машин ситуация обратная: эти темпы велики в начале эксплуатации, а к концу срока службы снижаются. Подобные ситуации можно объяснить упомянутой в разд. 1 простой моделью, предложенной в (Смоляк, 2006; Смоляк, 2008). Примем, что интенсивность приносимых машиной выгод включает две составляющие: постоянную и экспоненциально изменяющуюся в зависимости от эффективного возраста машины, что может быть описано формулой

$$B(t) = H(1 - e^{\mu(t-T)})/\mu + \rho U. \qquad (9)$$

Множитель H здесь – масштабный, а физический смысл калибровочного параметра можно пояснить, трактуя выгоды от использования машины как стоимость произведенной ею продукции за вычетом эксплуатационных затрат. Допустим, что производительность машины и часть эксплуатационных затрат не меняются с возрастом, а другая часть этих затрат с возрастом растет экспоненциально с постоянным темпом μ. Эта ситуация описывается моделью (9) при $\mu > 0$. График зависимости $B(t)$ будет выпуклым *вверх*. Ситуация с $\mu < 0$ обратная: здесь с возрастом производительность машины и часть эксплуатационных затрат уменьшаются с постоянным темпом $\mu < 0$, а другая часть этих затрат остается постоянной. График зависимости $B(t)$ здесь выпуклый *вниз*.

Подставляя (9) в (8), находим

$$K(t)=\frac{1}{\rho+\lambda}\left\{H\frac{1-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}}{\mu}+\eta\int_t^T\left[H\frac{1-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}}{\mu}\right]\mathrm{e}^{(\eta-\alpha)(t-s)}ds\right\}+U=$$
$$=\frac{H}{(\rho+\lambda)\mu}\left\{1-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}+\eta\left[\frac{1-\mathrm{e}^{(\eta-\alpha)(t-T)}}{\eta-\alpha}-\frac{\mathrm{e}^{(\eta-\alpha)(t-T)}-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}}{\mu-\eta+\alpha}\right]\right\}+U. \tag{10}$$

Значение H можно определить, если известна стоимость машины в новом состоянии $K(0) = K$. Подставляя $t = 0$ в (10), получим уравнение для H:

$$\frac{H}{(\rho+\lambda)\mu}\left\{1-\mathrm{e}^{-\mu t}+\eta\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}}{\eta-\alpha}-\frac{\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}-\mathrm{e}^{-\mu T)}}{\mu-\eta+\alpha}\right]\right\}+U=K.$$

Отсюда находим

$$H=(K-U)(\rho+\lambda)\mu/\left\{1-\mathrm{e}^{\mu T}+\eta\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}}{\eta-\alpha}-\frac{\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}-\mathrm{e}^{\mu T}}{\mu-\eta+\alpha}\right]\right\}.$$

Подставляя его в (10), получим формулы для стоимости машины и коэффициентов годности:

$$K(t)=(K-U)k_0(t)+U,\quad k(t)=(1-u)k_0(t)+u, \tag{11}$$

где

$$k_0(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}+\eta\left[\frac{1-\mathrm{e}^{(\eta-\alpha)(t-T)}}{\eta-\alpha}-\frac{\mathrm{e}^{(\eta-\alpha)(t-T)}-\mathrm{e}^{\mu(t-T)}}{\mu-\eta+\alpha}\right]}{1-\mathrm{e}^{-\mu T}+\eta\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}}{\eta-\alpha}-\frac{\mathrm{e}^{-(\eta-\alpha)T}-\mathrm{e}^{-\mu T}}{\mu-\eta+\alpha}\right]}. \tag{12}$$

В США нередко оценивают стоимость подержанных машин, умножая стоимость машин соответствующей марки в новом состоянии (на первичном рынке) на коэффициент годности[4]. Полученная формула позволяет аналитически определить такие коэффициенты. Для этого введем в рассмотрение относительные показатели: *относительную утилизационную стоимость* $u = U/K(0)$ и нужные нам *коэффициенты годности* $k(t) = K(t)/K(0)$.

В этих обозначениях формула (11) примет вид

$$k(t)=(1-u)k_0(t)+u. \tag{13}$$

Формулу (13) можно трактовать и иначе: стоимость машины складывается из ее утилизационной стоимости – “стоимости машины как объекта утилизации”, не зависящей от эффективного возраста, и стоимости “машины как машины”, которая с возрастом уменьшается. Коэффициент $k_0(t)$ как раз и отражает указанное уменьшение.

Напомним, что в предложенные формулы помимо специальной ставки дисконтирования ρ входят параметры λ, η, α и μ. При этом в силу (1) и (6) λ и η выражаются через α и ρ следующими формулами:

$$\lambda=\frac{\alpha(\mathrm{e}^{\alpha T}-1)}{\mathrm{e}^{\alpha T}-1-\alpha T};\quad \eta=\frac{\lambda\alpha}{(\rho+\lambda)(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})}.$$

---

[4] Российские оценщики используют эквивалентный прием: стоимость машины в новом состоянии уменьшается на величину износа, который, в свою очередь, находится путем умножения стоимости машины в новом состоянии на коэффициент износа.

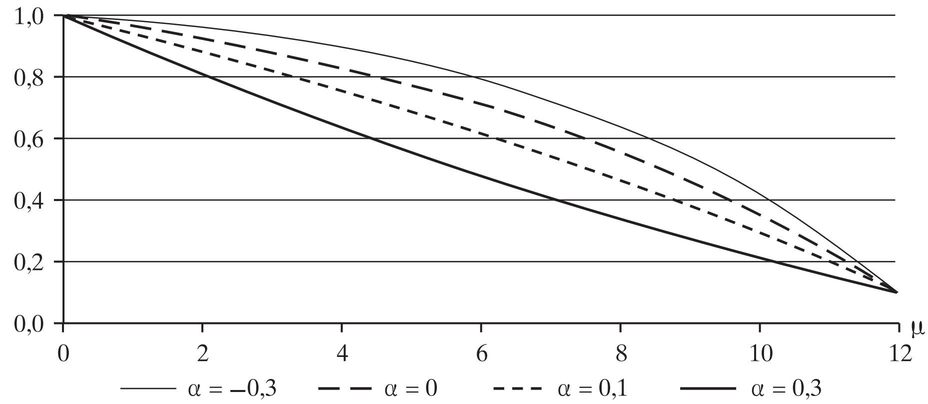

Рис. 1. Зависимость рыночной стоимости машины от ее эффективного возраста при α = 0,2 и разных значениях μ

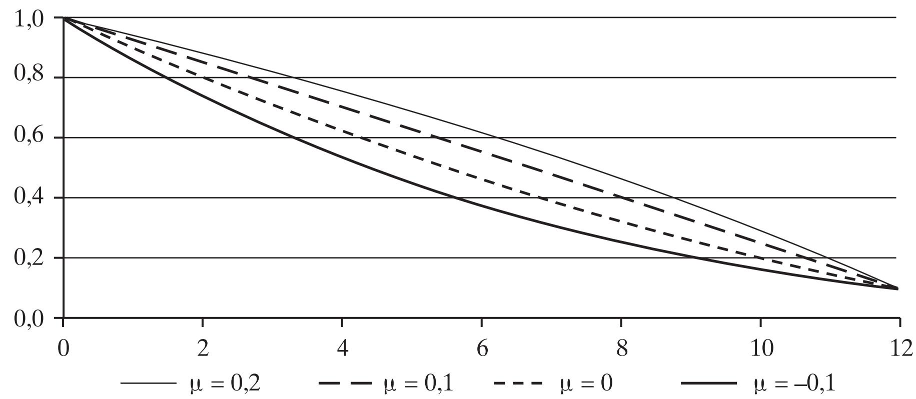

Рис. 2. Зависимость рыночной стоимости машины от ее эффективного возраста при α = 0,1 и разных значениях μ

Графики соответствующих зависимостей $k(t)$ для $T = 12$, $u = 0{,}05$, $\rho = 0{,}1$ и разных значений μ и α представлены на рис. 1–2.

Подбирая значения μ и α, формулой (12) можно аппроксимировать и некоторые используемые оценщиками табличные зависимости коэффициентов годности от возраста. В табл. 1 приведены такие коэффициенты по фронтальным погрузчикам, принятые в соответствии с Методикой оценки стоимости поврежденных транспортных средств, стоимости их восстановления и ущерба от повреждения (Р 03112194–0377–98) и рассчитанные по формуле (12) при $\mu = 0{,}019$; $\alpha = 0{,}0113$.

При практической оценке машин определенных марок необходимо вначале оценить соответствующие значения μ и α. В этих целях можно использовать данные о ценах реальных сделок с машинами разных возрастов. При этом μ и α подбираются так, чтобы получающиеся коэффициенты изменения стоимости машин соответствовали данным о ценах реальных сделок. Приведем пример подобного расчета.

В табл. 2 представлены данные о возрасте (в годах) и ценах (в тыс. руб.) 45 грейдеров трех марок (М1, М2, М3) разного возраста. По этой информации можно оценить рыночную стоимость машин всех марок в новом состоянии (K_1, K_2 и K_3), а также относительную остаточную стоимость u грейдеров и калибровочные параметры μ и α. Рациональный срок службы грейдеров $T = 13$ лет и специальную ставку дисконтирования $\rho = 0{,}062$ мы задаем экзогенно. Искомые оценки рассчитывались в электронной таблице Excel следующим образом.

Вначале задавались начальные значения искомых параметров. В соответствии с ними по формулам (11) и (12) рассчитывались теоретические коэффициенты годности $k(t)$. Далее определялись фактические коэффициенты годности – отношения указанных в таблице цен грейдеров

Таблица 1. Коэффициенты годности фронтальных погрузчиков

Возраст, годы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
По методике	1	0,92	0,78	0,71	0,54	0,48	0,32	0,25	0,12	0,05	0,04
По формуле (16)	1	0,879	0,763	0,653	0,548	0,448	0,354	0,266	0,185	0,109	0,040

Таблица 2. Цены грейдеров разного возраста

Марка	Возраст	Цена	Марка	Возраст	Цена	Марка	Возраст	Цена
M1	0	2390	M1	7	1500	M2	6	1400
M1	0	2200	M1	7	1450	M2	7	950
M1	0	2250	M1	7	900	M2	7	1200
M1	0	2550	M1	7	630	M2	8	800
M1	1	2000	M1	7	1350	M2	8	1200
M1	3	1450	M1	8	900	M2	9	943
M1	3	2030	M1	9	660	M2	9	750
M1	5	1300	M1	9	700	M2	9	600
M1	5	1300	M1	9	950	M3	0	2600
M1	5	1300	M1	10	550	M3	0	2630
M1	5	1330	M2	0	2370	M3	0	2580
M1	5	1600	M2	0	2300	M3	7	700
M1	6	680	M2	0	2400	M3	8	700
M1	6	1250	M2	2	2150	M3	10	520
M1	7	1500	M2	5	1300	M3	13	450

к ценам тех же грейдеров в новом состоянии (K_1, K_2 или K_3). После этого с помощью опции “Поиск решения” определялись такие значения параметров K_1, K_2, K_3, u, μ и α, которым отвечало наименьшее стандартное отклонение теоретических коэффициентов годности от фактических. Результаты оказались следующими: $K_1 = 2491$; $K_2 = 2445$; $K_2 = 2542$; $u = 0{,}155$; $\mu = -0{,}094$; $\alpha = -1{,}104$. Рис. 3 позволяет сопоставить найденные указанным способом “теоретические” (сплошная линия) и “фактические” коэффициенты годности рассматриваемых машин.

Из данных табл. 2 видно, что цены грейдеров одной марки в новом состоянии у разных дилеров разные. Обычно в таких случаях рыночные стоимости определяют как средние из цен дилеров. Однако получающаяся при этом зависимость $k(t)$ хуже согласуется с данными о ценах машин любого возраста (как в новом состоянии, так и подержанных). Поэтому в нашем расчете эти стоимости определялись так, чтобы расхождение между теоретическими и фактическими коэффициентами годности было минимальным. Нетрудно убедиться (в том числе и из рисунка), что рассчитанные таким образом стоимости значимо отличаются от средних цен грейдеров у дилеров (возможно, различия связаны с транспортными затратами).

По нашему мнению, μ и α можно рассматривать как техническую или технологическую характеристику машин данной марки или вида. В таком случае их значения не должны зависеть ни от того, к какому году относятся сделки, ни от того, к какому региону они относятся (вполне

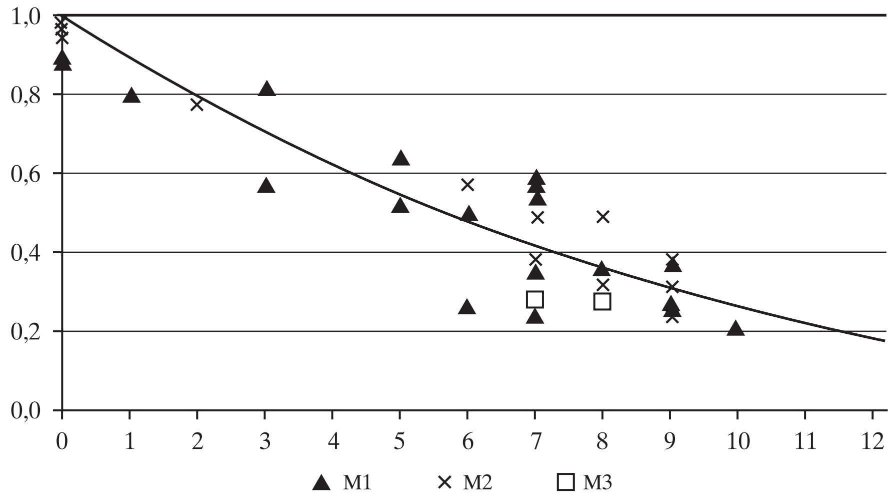

Рис. 3. Теоретические и фактические коэффициенты годности грейдеров разных марок

возможно, что они не зависят и от той страны, в которой совершаются сделки). Поэтому оценку этих параметров достаточно произвести однократно, и это будет не слишком трудоемкая работа, хотя и требующая сравнительно большого объема исходной информации о ценах сделок с машинами одной марки разного возраста (не менее 30–40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

МСО (2005): Международные стандарты оценки. Седьмое издание. 2005. М.: ОО “Российское общество оценщиков”.

Смоляк С.А. (2006): Дисконтирование денежных потоков в задачах оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости имущества. М.: Наука.

Смоляк С.А. (2008): Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. М.: РИО МАОК.

Смоляк С.А. (2009): Эргодические модели износа машин и оборудования // *Экономика и мат. методы.* Т. 45. № 4. С. 42–60.

Ковалев А.П., Кушель А.А., Хомяков В.С. и др. (2003): Оценка стоимости машин, оборудования и транспортных средств. М.: Интерреклама.

Assessors’ Handbook (2005): Assessors’ Handbook Using Section 581. Equipment Index and Percent Good Factors. January 2005. California State Board of Equalization.

Marshall&Swift (2008): Marshall Valuation Service, 2008. Marshall and Swift Publication Company. Los Angeles.

Поступила в редакцию
24.01.2011 г.

Machinery and Equipment Depreciation Stochastic Model

S.A. Smolyak

In the context of this work, the discounted cash flow method is applied to the problem of determining good factors for machinery and equipment items.
We offer the model allowing to estimate the depreciation of used machine of different age. The model does not demand too large initial information and takes into account property and income taxes. The depreciation process is modeled as stochastic one.

Keywords: equipment, depreciation, valuation, stochastic models.